1. Lokální a globální extrémy

Definice 1.1. *Říkáme, že* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* rostoucí v bodě $a \in R$, *právě když existuje* $P(a) \subset D(f)$ *takové, že* $\forall x \in P^-(a) : f(x) < f(a)$ *a* $\forall x \in P^+(a) : f(x) < f(a)$. *Analogicky definujeme funkci* klesající, neklesající *nebo* nerostoucí v bodě.

Věta 1.1. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $(b, c) \subset D(f)$. *Je-li* f *rostoucí na* (b, c), *je* f *rostoucí v každém bodě* $x \in (b, c)$.

Definice 1.2. *Říkáme, že* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $a \in \mathbb{R}$

1. ostré lokální maximum, *právě když existuje* $P(a) \subset D(f)$ *takové, že* $\forall x \in P(a) : f(x) < f(a)$.
2. ostré lokální minimum, *právě když existuje* $P(a) \subset D(f)$ *takové, že* $\forall x \in P(a) : f(x) > f(a)$.

Pokud zaměníme ostré nerovnosti za neostré, obdržíme definice lokálního maxima, *resp.* lokálního minima. *Má-li funkce v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *lokální maximum nebo lokální minimum, mluvíme souhrnně o* lokálním extrému.

Věta 1.2. *(***Postačující podmínka pro "lokální monotonii"***) Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *a existuje* $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. *Pak*

1. *je-li* $f'(a) > 0$, *je* f *v* a *rostoucí,*
2. *je-li* $f'(a) < 0$, *je* f *v* a *klesající,*

Věta 1.3. (Nutná podmínka pro lokální extrém) *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ *a existuje* $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. *Má-li* f *v bodě* a *lokální extrém, pak* $f'(a) = 0$.

Je dobré uvědomit si směr předchozích tvrzení :

$$(\textit{extrém v bodě} \Rightarrow \textit{nulová derivace v bodě})$$

resp.

$$(\textit{kladná derivace v bodě} \Rightarrow \textit{funkce v bodě roste}).$$

Věta 1.4. *(***O globálním extrému***) Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$ *a* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* $< a, b >$. *Označme*

$$\mathbf{M} = \{x \in (a, b) | f'(x) = 0 \vee f'(x) \text{ neexistuje}\} \cup \{a, b\}.$$

Pak $\max_{x \in <a,b>} f(x) = \max_{x \in \mathbf{M}} f(x)$ *a* $\min_{x \in <a,b>} f(x) = \min_{x \in \mathbf{M}} f(x)$.

2. Věty o střední hodnotě

Věta 2.1. *(***Rolleova věta***) Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$ *a* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Nechť platí*

1. f *je spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b \rangle$,
2. *pro každé* $x \in (a, b)$ *existuje* $f'(x) \in \mathbb{R}^*$,
3. $f(a) = f(b)$.

Pak existuje číslo $c \in (a, b)$ *takové, že* $f'(c) = 0$.

Věta 2.2. *(***Lagrangeova věta o přírůstku funkce***) Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$ *a* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Nechť platí*

1. f *je spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b \rangle$,
2. *pro každé* $x \in (a, b)$ *existuje* $f'(x)$.

Pak existuje číslo $c \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ neboli } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Věta 2.3. *(***O limitě jednostranné derivace***) Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je zprava spojitá v bodě* $a \in \mathbb{R}$. *Nechť dále existuje* $\lim_{x \to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. *Pak existuje* $f'_+(a)$ *a je* $f'_+(a) = A$.

Věta 2.4. *(***l'Hospitalovo pravidlo***) Nechť* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$. *Nechť existuje* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *a nechť je splněna jedna z podmínek*

1. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$.

Pak existuje $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

3. Derivace funkce, monotonie a lokální extrémy

Věta 3.1. (**O monotonii na intervalu**) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $\mathbf{I}$ a nechť v každém vnitřním bodě $\mathbf{I}$ existuje derivace $f'(x)$. Pak*

(1) *Je-li $f'(x) > 0$ pro každý vnitřní bod x intervalu $\mathbf{I}$, je f rostoucí na $\mathbf{I}$.*
(2) *Je-li $f'(x) < 0$ pro každý vnitřní bod x intervalu $\mathbf{I}$, je f klesající na $\mathbf{I}$.*
(3) *Je-li $f'(x) = 0$ pro každý vnitřní bod intervalu $\mathbf{I}$, je f konstantní na $\mathbf{I}$.*

Věta 3.2. (**Postačující podmínky pro lokální maximum**) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v $a \in \mathbb{R}$. Pak*

(1) *Je-li f rostoucí na $P^-(a)$ a klesající na $P^+(a)$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*
(2) *Je-li $\forall x \in P^-(a) : f'(x) > 0$ a $\forall x \in P^+(a) : f'(x) < 0$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*

Věta 3.3. (**Postačující podmínky pro lokální minimum**) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v $a \in \mathbb{R}$. Pak*

(1) *Je-li f klesající na $P^-(a)$ a rostoucí na $P^+(a)$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*
(2) *Je-li $\forall x \in P^-(a) : f'(x) < 0$ a $\forall x \in P^+(a) : f'(x) > 0$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*

Věta 3.4. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ a existuje $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ takové, že $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ a $f^{(n)}(a) \neq 0$. Pak*

(1) *Je-li n sudé a $f^{(n)}(a) > 0$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*
(2) *Je-li n sudé a $f^{(n)}(a) < 0$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*
(3) *Je-li n liché a $f^{(n)}(a) > 0$, pak f je v bodě a rostoucí.*
(4) *Je-li n liché a $f^{(n)}(a) < 0$, pak f je v bodě a klesající.*

4. Konvexní a konkávní funkce

Definice 4.1. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na intervalu $\mathbf{I}$.*

(1) *Říkáme, že f je* na intervalu $\mathbf{I}$ ryze konvexní, *právě tehdy, když pro libovolnou trojici $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{I}, x_1 < x_2 < x_3$ platí*
$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$
(2) *Říkáme, že f je* na intervalu $\mathbf{I}$ ryze konkávní, *právě tehdy, když pro libovolnou trojici $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{I}, x_1 < x_2 < x_3$ platí*
$$f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Pokud budeme v prvním případě psát nerovnost $\leq$, mluvíme o funkci konvexní na intervalu $\mathbf{I}$. *Píšeme-li v druhém případě nerovnost $\geq$, mluvíme o funkci* konkávní na intervalu $\mathbf{I}$.

Věta 4.1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze konvexní na $\mathbf{I}$, právě když $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{I}, x_1 < x_2 < x_3$ je*

(1)
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 4.2. (**O konvexnosti na intervalu**) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu $\mathbf{I}$ a nechť v každém vnitřním bodě intervalu $\mathbf{I}$ existuje druhá derivace. Pak*

(1) *Je-li $f''(x) > 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu $\mathbf{I}$, je f ryze konvexní na $\mathbf{I}$.*
(2) *Je-li $f''(x) < 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu $\mathbf{I}$, je f ryze konkávní na $\mathbf{I}$.*
(3) *Je-li $f''(x) = 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu $\mathbf{I}$, je f lineární na $\mathbf{I}$.*

Definice 4.2. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D(f)$ a existuje vlastní $f'(a)$.*

(1) *Říkáme, že f je* v bodě a ryze konvexní, *právě když existuje $P(a)$ takové, že $\forall x \in P(a)$:*

(2)
$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

(2) *Říkáme, že f je* v bodě a ryze konkávní, *právě když existuje $P(a)$ takové, že $\forall x \in P(a)$:*

(3)
$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a).$$

(3) *Říkáme, že a je* inflexní bod *právě když existuje $P(a)$ takové, že $\forall x \in P^-(a)$ platí (4) a $\forall x \in P^+(a)$ platí (5) nebo naopak $\forall x \in P^-(a)$ platí (5) a $\forall x \in P^+(a)$ platí (4).*

Věta 4.3. (**Postačující podmínka pro konvexnost, konkávnost v bodě**) *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ *a existuje* $f''(a)$.

(1) *Je-li* $f''(a) > 0$, *pak* f *je ryze konvexní v* a.
(2) *Je-li* $f''(a) < 0$, *pak* f *je ryze konkávní v* a.

Věta 4.4. (**Nutná podmínka pro inflexní bod**) *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ *a existuje* $f''(a)$. *Je- li* $a \in \mathbb{R}$ *inflexní bod* f, *je* $f''(a) = 0$.

5. Asymptota

Definice 5.1. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Lineární funkce* $p : y = kx + q, x \in \mathbb{R}$ *se nazývá* asymptotou f *v* ∞ *(resp. v* $-\infty$*), jestliže*

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Věta 5.1. (**O asymptotě**) *Lineární funkce* $p : y = kx + q, x \in \mathbb{R}$ *je asymptotou* f *v* ∞ *právě tehdy, když*

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$,
(2) $\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = q \in \mathbb{R}$.